UNIVERSIDADE DE ÉVORA

# Acesso ao Ensino Superior dos Maiores de 23

# Prova Específica de Matemática

2017

Nome :_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

**Instruções :**

1. Preencha correctamente o seu nome.

2. O único material permitido é o de escrita e a calculadora.

3. O teste tem a duração de 120 minutos.

4. As perguntas de escolha múltipla têm quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta. Se assinalar mais do que uma resposta a questão terá cotação zero.

5. Excepto nas perguntas de escolha múltipla, justifique convenientemente as suas respostas. Em particular, apresente na folha de teste todas as fórmulas que utilizar e todos os cálculos que efectuar.

**Cotações**

Grupo I
1.
2.
3.
4.
5.
6.1.
6.2.a.
6.2.b.
6.2.c.
_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _
Grupo II
1.
2.
3.
4.
5.
6.1.a.
6.1.b.
6.1.c.
6.2.
7.
8.
_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _
Total:

Nome :_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

## Grupo I

1. Considere que tem quatro garrafas de água iguais e seis garrafas de diferentes sumos para arrumar numa caixa com doze compartimentos.

   O número total de arrumações possíveis é:

   ☐ (a) $^{12}C_4 \times {}^{8}C_6$ ☐ (b) $^{12}A_4' \times {}^{8}C_6$

   ☐ (c) $^{12}C_4 \times {}^{8}A_6$ ☐ (d) $^{12}A_4 \times {}^{8}A_6$

2. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos do espaço $\Omega$.

   Sabendo-se que: $P(A) = \frac{1}{5}$, $P\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{3}$ e $P(B|A) = \frac{5}{6}$.

   Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

   ☐ (a) $\frac{7}{10}$ ☐ (b) $\frac{8}{15}$ ☐ (c) $\frac{13}{15}$ ☐ (d) $\frac{1}{30}$

3. Uma determinada companhia aérea efetua regularmente voos de Lisboa para Paris. Seja $X$ a variável aleatória que representa o número de atrasos significativos (mais de 1 h) semanais no voo Lisboa-Paris. De acordo com os dados recolhidos pela companhia aérea, obteve-se a seguinte tabela de distribuição de probabilidades da variável $X$:

   | $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
   |---|---|---|---|---|
   | $P(X = x_i)$ | $a$ | $\frac{2a}{3}$ | $\frac{a}{2}$ | $\frac{2a}{6}$ |

   Qual o número médio de atrasos significativos semanais no voo Lisboa-Paris?

   ☐ (a) 1 ☐ (b) $\frac{16}{15}$ ☐ (c) $\frac{34}{15}$ ☐ (d) $\frac{20}{3}$

4. Considere a equação de 2.º grau definida por $x^2 + kx + 4 = 0$. Para determinar o valor de $k$, joga-se um dado ao ar e o número de pintas da face do dado que fica virada para cima é atribuido a $k$. Deste modo, a probabilidade da equação de 2.º grau assim obtida não ter raízes reais é:

   ☐ (a) $\frac{1}{2}$ ☐ (b) $\frac{1}{3}$ ☐ (c) 1 ☐ (d) $\frac{2}{3}$

5. Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis aleatórias que representam a temperatura do ar (em $^oC$) registada, respetivamente, pelas estações meteorológicas A e B.

   Sabe-se que $X \sim N(15; 2)$ e $Y \sim N(16; 2)$. Diga qual das seguintes afirmações está correta:

   ☐ (a) $P(X < 14) < P(Y < 15)$ ☐ (b) $P(X < 14) = P(Y < 15)$

   ☐ (c) $P(X < 14) > P(Y < 15)$ ☐ (d) $P(X > 14) < P(Y > 15)$

6. Numa empresa que funciona na zona industrial de Évora, sabe-se que 60% dos seus funcionários residem fora de Évora e os restantes funcionários residem em Évora.

6.1 Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:

- o número de homens é igual ao número de mulheres;
- 30% dos homens residem fora de Évora.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa. Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Évora?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6.2 Considere, agora, que se escolhem, ao acaso, quinze funcionários dessa empresa. **Justificando convenientemente,** determine:

($a$) A probabilidade de, no máximo, doze desses funcionários residirem em Évora.

($b$) A média e o desvio padrão do número de funcionários da empresa que residem em Évora.

($c$) O número de funcionários dessa empresa necessário para garantir que a probabilidade de, no mínimo, um funcionário da empresa residir em Évora seja superior a 98%.

Nome :_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

**Grupo II**

1. Seja $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \log_2 x$. Seja $(u_n)$ a sucessão definida por $u_n = f\,(2\sqrt{n})$. Indique qual das expressões seguintes define o termo geral de $(u_n)$ :

☐ $(a)$ $4n$ ☐ $(b)$ $\dfrac{2 + \log_2 n}{2}$

☐ $(c)$ $2\,\log_2 \sqrt{n}$ ☐ $(d)$ $\dfrac{1 + \log_2 n}{2}$

2. Determine o conjunto solução da inequação

$$e^{\frac{x^2 - 5x}{x^2 + 1}} > 1.$$

☐ $(a)$ $]0, 5[$ ☐ $(b)$ $\{0\}$

☐ $(c)$ $]-\infty, 0[\,\cup\,]5, +\infty[$ ☐ $(d)$ $\{5\}$

3. Seja $(x_n)$ a sucessão de termo geral $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ e seja $(y_n)$ a sucessão de termo geral $y_n = 1 + \ln{(x_n)}$. Qual o valor de $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ?

☐ $(a)$ $2$ ☐ $(b)$ $3$ ☐ $(c)$ $1 + e$ ☐ $(d)$ $2 + e$

4. Para um certo valor real de $a$, é contínua em $\mathbb{R}$ a função $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & se \;\; x < a \\ x^2 - x + 3 & se \;\; x \geq a\,. \end{cases}$$

Qual é o valor de $a$ ?

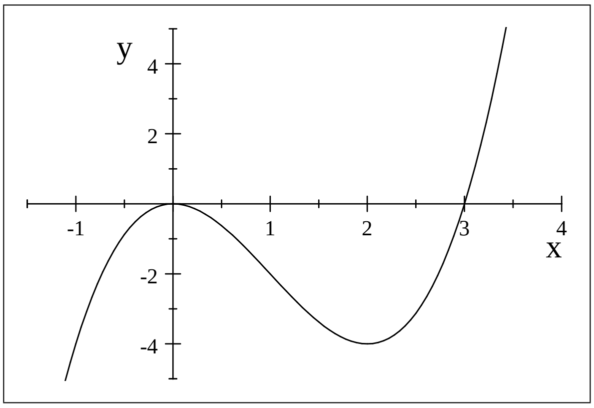
☐ $(a)$ $-3$ ☐ $(b)$ $-2$ ☐ $(c)$ $2$ ☐ $(d)$ $3$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[-1, 4]$. Tem-se que $f\,(-1) = 3$ e $f\,(4) = 9$. Em qual das opções seguintes está definida uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de, pelo menos, um zero no intervalo $]-1, 4[$ ?

☐ $(a)$ $g\,(x) = 2x + f\,(x)$ ☐ $(b)$ $g\,(x) = 2x - f\,(x)$

☐ $(c)$ $g\,(x) = x^2 + f\,(x)$ ☐ $(d)$ $g\,(x) = x^2 - f\,(x)$

6. Considere a figura seguinte onde está representado o gráfico da derivada de uma certa função $f$, isto é, o gráfico de $f'$.




Sabemos que:

- $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- $f'(0) = f'(3) = 0$;
- $f'(0) = 0$ é máximo relativo de $f'$;
- $f'(2) = -4$ é mínimo relativo de $f'$.

6.1. Indique, **justificando convenientemente as suas respostas**:

$(a)$ o domínio da função $f$;

$(b)$ os intervalos de monotonia e os extremos relativos, caso existam, da função $f$;

$(c)$ o sentido das concavidades e os pontos de inflexão, caso existam, do gráfico de $f$.

6.2. Existem assimptotas verticais do gráfico de $f$? Justifique.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e verificando:

- $f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
- $f(1) = f'(1) = e$.

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = \dfrac{\ln[f(x)]}{f(x)}$. Calcule $h'(1)$.

8. Dada uma função $g : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, sabe-se que:

- $g$ não tem zeros;
- a recta de equação $y = x - 2$ é assimptota do gráfico de $g$.

Seja $h : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = \dfrac{x^2}{g(x)}$. Prove que a recta de equação $y = x + 2$ é assimptota do gráfico de $h$.